

## לוגיקה (1) – תרגיל 10

1. יהיו  $\varphi(x), \psi(x)$  נוסחות שבהן  $x$  המשתנה החופשי היחיד (זו אינה הנחה מהותית, אך היא מפשטת במידת מה את הכתיבה).
  - א. נניח ש-  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$  האם נובע בהכרח ש-  $\forall x \varphi(x) \equiv \forall x \psi(x)$ .
  - ב. נניח ש-  $\forall x \varphi(x) \equiv \forall x \psi(x)$  האם נובע ש-  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ .
  - ג. נניח ש-  $\exists x \varphi(x) \equiv \exists x \psi(x)$  האם בהכרח נובע שאם קיים  $A' \models \exists x \varphi(x)$  אז יש מודל  $A$  והשמה  $s$  כך ש-  $A(\varphi)[s] = A(\psi)[s] = T$ .
2. הוכיחו את השקילויות הבאות:
  - א.  $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
  - ב.  $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
  - ג. אם  $x$  אינו מופיע ב-  $\psi$  עבור אילו קשרים דו-מקומיים (מבין  $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ) מתקיים  $\forall x(\varphi(x) \circ \psi) \equiv \forall x\varphi(x) \circ \psi$ .
  - ד. עבור הקשר/קשרים מסעיף ג' עבורם השקילות אינה מתקיימת נסחו והוכיחו שקילות דומה (שכן מתקיימת).
3.
  - א. יהי  $t$  ש"ע ויהי  $x$  משתנה אישי שאינו מופיע ב-  $t$ . הראו שלכל מבנה  $A$  ולכל השמה  $s$ ,  $A(\text{sub}(t, x, t'))[s] = A(t)[s]$ .
  - ב. נסחו במדויק והוכיחו את הטענה המקבילה עבור נוסחות (שימו לב – מהי המקבילה הנכונה במקרה זה ל- " $x$  אינו מופיע ב-  $t$ ").
4. נגדיר ברקורסיה פונקציה  $\text{rep}(\varphi, \bar{x}, \bar{y})$  - המחליפה את המשתנים המכומתים  $x_1, \dots, x_n$  במשתנים  $y_1, \dots, y_n$ :
  - א. כתבו את הגדרת  $\text{rep}(\varphi, \bar{x}, \bar{y})$  עבור המקרים הקלים:  $\varphi$  אטומית,  $\varphi = \neg\psi$  ו-  $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$ .
  - ב. עבור  $\varphi = Qy\psi$  ל-  $y$  שאינו מבין  $x_1, \dots, x_n$  נגדיר  $\text{rep}(\varphi, \bar{x}, \bar{y}) = (Qy)\text{rep}(\psi, \bar{x}, \bar{y})$ .  
עבור  $\varphi = Qx_i\psi$  נגדיר  $\text{rep}(\varphi, \bar{x}, \bar{y}) = (Qy_i)\text{sub}(\text{rep}(\psi, \bar{x}, \bar{y}), x_i, y_i)$ .  
הוכיחו באינדוקציה על יצירת הנוסחה שאם  $\varphi$  נוסחה כלשהי ו-  $y_1, \dots, y_n$  משתנים חדשים שאינם מופיעים ב-  $\varphi$  אזי  $y_i$  כשר להצבה עבור  $x_i$  ב-  $\text{rep}(\varphi, \bar{x}, \bar{y})$  (בכך תראו, למעשה, את השלב העיקרי בהוכחה שההגדרה לעיל היא טובה).
5. תהי  $L = \{r, f\}$  שפה לתחשיב היחסים שבה  $f$  סימן פונקציה חד מקומי ו-  $r$  סימן יחס דו-מקומי.
  - א. כמה מבנים שונים ל-  $L$  יש בעולם בן שני איברים  $A = \{a, b\}$ .
  - ב. תארו לפחות 8 מבנים לא איזומורפים ל-  $L$  בעולם  $A = \{a, b\}$ , והוכיחו שאומנם אינם איזומורפים.
  - ג. לפחות עבור שניים מן המבנים שתיארתם בסעיף א' תארו מבנה איזומורפי שאינו זהה לו.
  - ד. מה הגודל המרבי של מחלקת איזומורפיזם (כלומר מה הגודל המרבי של קבוצת מבנים שכולם שונים אך איזומורפים זה לזה) – כרגיל כל המבנים בעולם  $A = \{a, b\}$ .
  - ה. האם יש מחלקת איזומורפיזם מגודל 1 – אם כן, תנו דוגמה.
  - ו. מה מספר מחלקות האיזומורפיזם.